Θεωρία Διαλέξεων 1-3

- Αλφάβητο Σ ονομάζεται κάθε μη κενό πεπερασμένο σύνολο συμβόλων.
- Συμβολοσειρά w πεπερασμένου μήκους $|w|$ επί αλφαβήτου Σ ορίζεται, ως η πεπερασμένη ακολουθία

$$w = \begin{cases} () & |w| = 0 \\ (w_i)_{1\leq i \leq |w|} | w_i \in \Sigma & |w| \in \mathbb{Z}^+ \end{cases}$$

  Συμβατικά γράφουμε ε για την άδεια συμβολοσειρά μηδενικού μήκους, ενώ $w_1 w_2 \dots w_{|w|}$ για τη μη άδεια.

- Συνένωση $x \circ y$ συμβολοσειρών x και y ορίζεται ως

$$x \circ y = \begin{cases} y & x = \varepsilon \\ x & y = \varepsilon \\ x_1 x_2 \dots x_{|x|} y_1 y_2 \dots y_{|y|} & x, y \neq \varepsilon \end{cases}$$

  Συμβατικά γράφουμε xy, επίσης το x και το y λέγεται **πρόθημα** και **επίθημα** της συνένωσης, αντιστοίχως.

  - Συνένωση $i \in \mathbb{N}_0$ φορές μιας συμβολοσειράς w ορίζεται ως

$$w^i = \begin{cases} \varepsilon & i = 0 \\ w^{i-1} w & i \in \mathbb{Z}^+ \end{cases}$$

- Αστέρι Κλέινι Σ^* ενός συνόλου Σ, ονομάζεται το σύνολο

$$\{\varepsilon\} \cup \left\{ w_1 w_2 \dots w_k : k \in \mathbb{Z}^+ \wedge \forall i \in \{1, 2, \dots k\} \ \ w_i \in \Sigma \right\}$$

- Υποσυμβολοσειρά z συμβολοσειράς w επί αλφαβήτου Σ, λέγεται οποιαδήποτε συμβολοσειρά $z \in \Sigma^*$ για την οποία ισχύει ότι

$$\exists x \in \Sigma^* \ \exists y \in \Sigma^* \ w = xzy$$

- Ανάστροφη συμβολοσειρά w^R συμβολοσειράς w επί αλφαβήτου Σ ορίζεται

$$w^R = \begin{cases} \varepsilon & w = \varepsilon \\ a u^R & w = ua \wedge u \in \Sigma^* \wedge a \in \Sigma \end{cases}$$

- Ανάστροφη συνένωση $(wx)^R = x^R w^R$

- Γλώσσα L επί αλφαβήτου Σ, ονομάζεται οποιοδήποτε σύνολο $L \subseteq \Sigma^*$.
  - Λέξη της γλώσσας L, ονομάζεται οποιαδήποτε συμβολοσειρά ανήκει στη γλώσσα L.
  - Κανόνας f της γλώσσας L επί αλφαβήτου Σ, είναι οποιαδήποτε συνάρτηση

    $$f : \Sigma^* \to \{False\} \cup L$$

    , όπου $False$ είναι λογική τιμή.

Λύσεις Φροντιστηρίου 1 - Διαλέξεων 1-3

Να δειχθεί ότι υπάρχει 3-κανονικός μη κατευθυνόμενος γράφος $G = (V, E)$ για κάθε άρτιο πλήθος κόμβων $n \geq 4$.
Απόδειξη:
Κατασκευάζουμε τον γράφο G έτσι, ώστε:

- $V = \{1, 2, \dots, n\}$
- $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\} \dots, \{n-1, n\}, \{n, 1\}\} \cup \big\{\{i, \frac{n}{2} + i\} : i \in \{1, 2, \dots, \frac{n}{2}\}\big\}$

Να δειχθεί ότι:

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

Απόδειξη:
Έστω, $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ (ανάγωγο κλάσμα)

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Leftrightarrow$

$$p^2 = 2q^2$$

Λήμμα: Αν n^2 είναι άρτιος, τότε n είναι άρτιος. (Αποδεικνύεται έμμεσα)
Επομένως, $\exists k \in \mathbb{Z}\ (2k)^2 = 2q^2 \Leftrightarrow 4k^2 = 2q^2 \Leftrightarrow$

$$q^2 = 2k^2$$

Εφόσον, $2|p \wedge 2|q$ το κλάσμα $\frac{p}{q}$ δεν είναι ανάγωγο, άτοπο.

Να δειχθεί ότι:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0\ 7|4^{2n+1} + 3^{2n+1}$$

Απόδειξη:
Επαγωγική βάση:
Αν $n = 0$, τότε

$$4^{2 \cdot 0+1} + 3^{2 \cdot 0+1} = 4 + 3 = 7 \Rightarrow 7|4^{2 \cdot 0+1} + 3^{2 \cdot 0+1}$$

Επαγωγική υπόθεση:
Αν $n = k$, τότε

$$7 | 4^{2k+1} + 3^{2k+1}$$

Επαγωγικό βήμα:
Αν $n = k + 1$, να δειχθεί ότι

$$7 | 4^{2(k+1)+1} + 3^{2(k+1)+1}$$

$$4^{2(k+1)+1} + 3^{2(k+1)+1} = 4^{2k+3} + 3^{2k+3} = 16 \cdot 4^{2k+1} + 9 \cdot 3^{2k+1} =$$

$$7 \cdot 4^{2k+1} + 9 \cdot (4^{2k+1} + 3^{2k+1})$$

Λόγω, επαγωγικής υπόθεσης το ζητούμενο έπεται.

Υποθέτουμε, γλώσσα L επί αλφαβήτου $\Sigma = \{0, 1\}$ της οποίας τα στοιχεία παράγονται από τον παρακάτω κανόνα

$$f(u) = \begin{cases} \varepsilon & u = \varepsilon \\ 0u1 & u \in L \\ False & u \in \Sigma^* \backslash L \end{cases}$$

Να δειχθεί ότι:
i)

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \; 0^n 1^n \in L$$

ii)

$$\forall w \in L \; \exists k \in \mathbb{N}_0 \; w = 0^k 1^k$$

Απόδειξη:
i) Επαγωγική βάση:
Αν $n = 0$, τότε

$$0^0 1^0 = \varepsilon \Rightarrow 0^0 1^0 \in L$$

Επαγωγική υπόθεση:
Αν $n = m$, τότε

$$0^m 1^m \in L$$

Επαγωγικό βήμα:
Αν $n = m + 1$, να δειχθεί ότι

$$0^{m+1} 1^{m+1} \in L$$

$$f(0^m 1^m) \overset{\text{Επ. υπόθ.}}{=} 0^{m+1}1^{m+1} \in L$$

ii) Θα δειχθεί επαγωγικά ότι $\forall w \in L\ |w|\ mod\ 2 = 0$
Επαγωγική βάση:
Αν $w = \varepsilon$, τότε

$$|w| = |\varepsilon| = 0 \Rightarrow |w|\ mod\ 2 = 0$$

Επαγωγική υπόθεση:
Αν $w = v$, τότε

$$|v|\ mod\ 2 = 0$$

Επαγωγικό βήμα:
Αν $w = 0v1$, να δειχθεί ότι

$$|0v1|\ mod\ 2 = 0$$

$$|0v1| = |0| + |v| + |1| = |v| + 2 \Rightarrow |0v1|\ mod\ 2 = 0$$

Θα δειχθεί επαγωγικά ότι $\forall w \in L\ w = 0^{\frac{|w|}{2}}1^{\frac{|w|}{2}}$
Επαγωγική βάση:
Αν $|w| = 0$, τότε

$$w = \varepsilon = 0^{\frac{|w|}{2}}1^{\frac{|w|}{2}}$$

Επαγωγική υπόθεση:
Αν $|w| = 2\lambda$, τότε

$$w = 0^\lambda 1^\lambda$$

Επαγωγικό βήμα:
Αν $|w| = 2(\lambda + 1)$, να δειχθεί ότι

$$w = 0^{\lambda+1}1^{\lambda+1}$$

$$|w| \geq 2 \Leftrightarrow w \neq \varepsilon \Leftrightarrow \exists v \in L\ w = f(v) \Leftrightarrow |w| = |f(v)| \Leftrightarrow$$

$$2(\lambda + 1) = |0v1| \Leftrightarrow 2\lambda + 2 = |v| + 2 \Leftrightarrow$$

$$|v| = 2\lambda \overset{\text{Επ. υπόθ.}}{\Leftrightarrow} u = 0^\lambda 1^\lambda \Leftrightarrow w = f(0^\lambda 1^\lambda) = 0^{\lambda+1}1^{\lambda+1}$$

Θεωρία Πεπερασμένων Αυτομάτων

Αιτιοκρατικό πεπερασμένο αυτόματο DFA, ονομάζεται η πεντάδα $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ που αποτελείται από:

- μη κενό πεπερασμένο σύνολο καταστάσεων Q,
- αλφάβητο εισόδου Σ,
- συνάρτηση μετάβασης $\delta : Q \times \Sigma \to Q$,
- αρχική κατάσταση $q_0 \in Q$ και
- υποσύνολο καταστάσεων αποδοχής F του συνόλου Q.

Αναπαρίσταται ως σταθμισμένος γράφος $G = (Q, \{(q, \delta(q, a)) : q \in Q \wedge a \in \Sigma\})$ όπου το βέλος αφετηρίας δείχνει την αρχική κατάσταση και κάθε δαχτύλιος επιδεικνύει καταστάση αποδοχής.

Εκτεταμένη συνάρτηση μετάβασης $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to Q$ ενός DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ορίζεται αναδρομικά:

$$\hat{\delta}(q, w) = \begin{cases} q & w = \varepsilon \\ \delta(\hat{\delta}(q, u), a) & w = ua \wedge u \in \Sigma^* \wedge a \in \Sigma \end{cases}$$

- Το M αποδέχεται συμβολοσειρά εισόδου w ανν $\hat{\delta}(q_0, w) \in F$.
- Καταστάσεις q_1 και q_2 είναι ισοδύναμες ανν $\forall w \in \Sigma^*$

$$\hat{\delta}(q_1, w), \hat{\delta}(q_2, w) \in F \vee \hat{\delta}(q_1, w), \hat{\delta}(q_2, w) \notin F$$

Αναιτιοκρατικό πεπερασμένο αυτόματο NFA, ονομάζεται η πεντάδα $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ που αποτελείται από:

- μη κενό πεπερασμένο σύνολο καταστάσεων Q,
- αλφάβητο εισόδου Σ,
- συνάρτηση μετάβασης $\delta : Q \times \{\varepsilon\} \cup \Sigma \to P(Q)$,
- αρχική κατάσταση $q_0 \in Q$ και
- υποσύνολο καταστάσεων αποδοχής F του Q.

ε - Κλειστότητα $E(q)$ κατάστασης q ορίζεται αναδρομικά

$$E(q) = \begin{cases} \{q\} & \delta(q, \varepsilon) = \{q\} \\ \{q\} \cup E\left(\delta(q, \varepsilon) \setminus \{q\}\right) & \delta(q, \varepsilon) \neq \{q\} \end{cases}$$

, όπου ε - κλειστότητα $E(P)$ συνόλου $P \subseteq Q$ ορίζεται

$$E(P) = \bigcup_{q \in P} E(q)$$

Εκτεταμένη συνάρτηση μετάβασης $\delta^* : Q \times \Sigma^* \to P(Q)$ ορίζεται αναδρομικά:

$$\delta^*(q, w) = \begin{cases} E(q) & w = \varepsilon \\ \displaystyle\bigcup_{r \in \delta^*(q,u)} E\left(\delta(r, a)\right) & w = ua \wedge u \in \Sigma^* \wedge a \in \Sigma \end{cases}$$

- Το N αποδέχεται συμβολοσειρά εισόδου w ανν $\delta^*(q_0, w) \cap F \neq \emptyset$

Κανονική γλώσσα $L(X)$ **πεπερασμένου αυτομάτου** X με σύμβολα εισόδου από το αλφάβητο Σ, ονομάζεται το σύνολο $\{w \in \Sigma^* : X \text{ αποδέχεται } w\}$ και **αναγνωρίζει γλώσσα** A ανν $L(X) = A$

Ισοδύναμα αυτόματα, ονομάζονται τα αυτόματα που αναγνωρίζουν την ίδια γλώσσα.

Για κάθε NFA υπάρχει ισοδύναμο DFA.

Κανονική πράξη, ονομάζεται η πράξη που είναι κλειστή στην κλάση κανονικών γλωσσών.

Κανονικές πράξεις γλωσσών A και B:

- ένωση $A \cup B = \{x : x \in A \ \vee \ x \in B\}$,
- συνένωση $AB = \{xy : x \in A \wedge y \in B\}$ και
- $A^i = \begin{cases} \{\varepsilon\} & i = 0 \\ \{wv : w \in A^{i-1} \wedge v \in A\} & i \in \mathbb{Z}^+ \end{cases}$
- αστέρι Κλέινι $A^* = \displaystyle\bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} A^i$
- $A^+ = A^* A$

Αποδείξεις - Πεπερασμένα Αυτόματα

Να δειχθεί ότι κάθε NFA $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ έχει ισοδύναμο DFA $M = (Q', \Sigma, \delta', q'_0, F')$

Απόδειξη:

Θέτουμε,

- $Q' = P(Q)$
- $\delta'(R, a) = \bigcup\limits_{r \in R} E(\delta(r, a))\ R \subseteq Q \wedge a \in \Sigma$
- $q'_0 = E(q_0)$
- $F' = \{R \in Q' : R \cap F \neq \varnothing\}$

Να δειχθεί ότι η ένωση είναι κανονική πράξη.

Απόδειξη:

Έστω, $DFA's$ $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ και $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$. Θα κατασκευάσουμε DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ τέτοιο, ώστε $L(M) = L(M_1) \cup L(M_2)$.

Θέτουμε,

- $Q = Q_1 \times Q_2$
- $\delta((r_1, r_2), a) = (\delta_1(r_1, a), \delta_2(r_2, a))\ \ (r_1, r_2) \in Q \wedge a \in \Sigma$
- $q_0 = (q_1, q_2)$
- $F = (F_1 \times Q_2) \cup (Q_1 \times F_2)$

Απομένει να δειχθεί ότι:

$$w \in L(M) \Leftrightarrow w \in L(M_1) \cup L(M_2)$$

Αν $w \in L(M)$, τότε
$\hat{\delta}(q_0, w) \in F \Leftrightarrow \hat{\delta}\left((q_1, q_2), w\right) \in F$
Λήμμα: $\hat{\delta}\left((q_1, q_2), w\right) = \Big(\hat{\delta}_1(q_1, w), \hat{\delta}_2(q_2, w)\Big)$ (Αποδεικνύεται επαγωγικά)
$\hat{\delta}\left((q_1, q_2), w\right) \in F \overset{\text{Λήμμα}}{\Leftrightarrow} \Big(\hat{\delta}_1(q_1, w), \hat{\delta}_2(q_2, w)\Big) \in (F_1 \times Q_2) \cup (Q_1 \times F_2)$

- Αν $\left(\hat{\delta}_1(q_1, w), \hat{\delta}_2(q_2, w)\right) \in F_1 \times Q_2$, τότε
  $\hat{\delta}_1(q_1, w) \in F_1 \Leftrightarrow w \in L(M_1)$.

- Αν $\left(\hat{\delta}_1(q_1, w), \hat{\delta}_2(q_2, w)\right) \in Q_1 \times F_2$, τότε
  $\hat{\delta}_2(q_2, w) \in F_2 \Leftrightarrow w \in L(M_2)$

Επομένως,

$$w \in L(M) \Rightarrow w \in L(M_1) \cup L(M_2)$$

Αντιστρέφοντας τα επιχειρήματα προκύπτει η συνεπαγωγή

$$w \in L(M_1) \cup L(M_2) \Rightarrow w \in L(M)$$

Εναλλακτική Απόδειξη:
Έστω, $NFA's$ $N_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ και $N_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ με $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$.
Θα κατασκευάσουμε NFA $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ τέτοιο, ώστε $L(N) = L(N_1) \cup L(N_2)$.

Θέτουμε,

- $Q = \{q_0\} \cup Q_1 \cup Q_2 \ \wedge q_0 \notin \ Q_1 \cup Q_2$
- $\delta(q, a) = \begin{cases} \emptyset & q = q_0 \wedge a \neq \varepsilon \\ \{q_1, q_2\} & q = q_0 \wedge a = \varepsilon \\ \delta_1(q, a) & q \in Q_1 \\ \delta_2(q, a) & q \in Q_2 \end{cases}$
- $F = F_1 \cup F_2$

Απομένει να δειχθεί ότι:

$$w \in L(N) \Leftrightarrow w \in L(N_1) \cup L(N_2)$$

Λήμμα: $\delta^*(q_0, w) = \{q_0\} \cup \delta_1^*(q_1, w) \cup \delta_2^*(q_2, w)$ (Αποδεικνύεται επαγωγικά)

- Αν $w \in L(N)$, τότε
  $\delta^*(q_0, w) \cap F \neq \emptyset \Leftrightarrow$
  $\delta^*(q_0, w) \cap (F_1 \cup F_2) \neq \emptyset \Leftrightarrow$

$$\delta^*(q_0, w) \cap F_1 \cup \delta^*(q_0, w) \cap F_2 \neq \emptyset$$

- Αν $\delta^*(q_0, w) \cap F_1 \neq \emptyset$, τότε
  $(\{q_0\} \cup \delta_1^*(q_1, w) \cup \delta_2^*(q_2, w)) \cap F_1 \neq \emptyset \Leftrightarrow$
  $\{q_0\} \cap F_1 \cup \delta_1^*(q_1, w) \cap F_1 \cup \delta_2^*(q_2, w) \cap F_1 \neq \emptyset \Leftrightarrow$
  $\emptyset \cup \delta^*(q_1, w) \cap F_1 \cup \emptyset \neq \emptyset \Leftrightarrow$

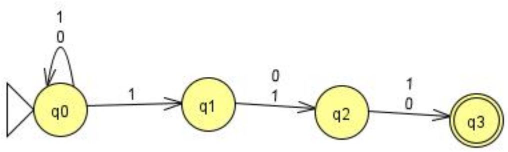
  $$\delta_1^*(q_1, w) \cap F_1 \neq \emptyset \Leftrightarrow w \in L(N_1)$$

- Αν $\delta^*(q_0, w) \cap F_2 \neq \emptyset$, ομοίως $w \in L(N_2)$

- Αν $w \in L(N_1) \cup L(N_2)$, τότε αντιστρέφοντας τα παραπάνω επιχειρήματα προκύπτει η αντίστροφη συνεπαγωγή.

Εφαρμογές

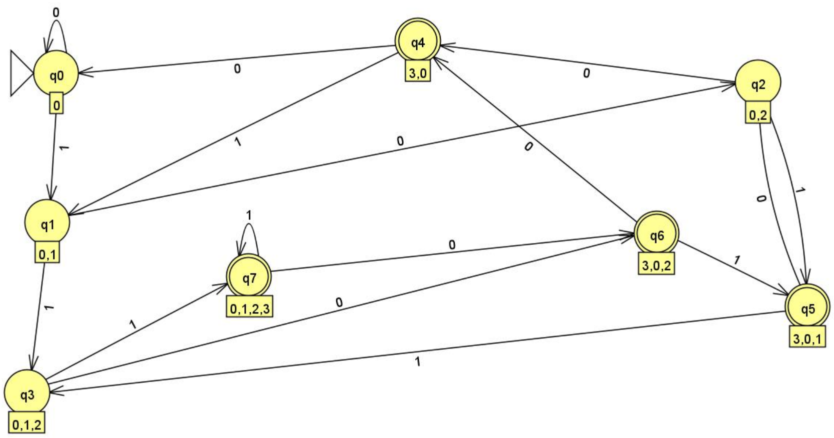
Μετατροπή NFA $= \{w : \text{Προπαραλήγουσα } = 1\}$ σε DFA



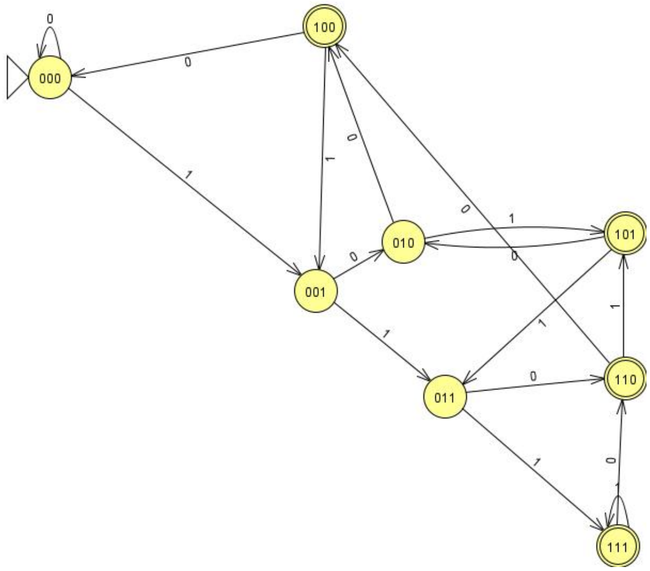
Η μεθοδολογία αποτρέπει απρόσιτες καταστάσεις, όμως μπορεί να εμφανίσει «νεκρές» ή αδιαχώριστες καταστάσεις.

Πίνακας 1: Καταστάσεις DFA

Κατάσταση	**Σύμβολο εισόδου**	
	0	1
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0,1\}$
$\{0,1\}$	$\{0,2\}$	$\{0,1,2\}$
$\{0,2\}$	$\{0,3\}$	$\{0,1,3\}$
$\{0,1,2\}$	$\{0,2,3\}$	$\{0,1,2,3\}$
$\{0,3\}$	$\{0\}$	$\{0,1\}$
$\{0,1,3\}$	$\{0,2\}$	$\{0,1,2\}$
$\{0,2,3\}$	$\{0,3\}$	$\{0,1,3\}$
$\{0,1,2,3\}$	$\{0,2,3\}$	$\{0,1,2,3\}$



Υλοποίηση, ως ουρά μεγέθους 3:



Έτυχε να μην εμφανιστούν «νεκρές» ή αδιαχώριστες καταστάσεις επεξήγηση εξάλειψης τέτοιων καταστάσεων μπορεί να βρεθεί εδώ:

Wikipedia: Ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο

NesoAcademy: Minimization of Deterministic Finite Automata (DFA)